

Introduction aux microondes et antennes

Série 10

Problème1

Soit le champ électrique donné par

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}_x \sqrt{2} \cos(\omega t) + \mathbf{e}_y \sqrt{2} (\cos(\omega t) + \sin(\omega t))$$

- a) Trouver le vecteur phaseur équivalent
- b) Montrer que la polarisation est elliptique
- c) Décomposer $\mathbf{E}(t)$ en deux champs :
 - à polarisation linéaire et déphasés de 90°
 - à polarisation circulaire de sens opposé

Solution:

Soit le champ électrique donné par

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}_x \sqrt{2} \cos(\omega t) + \mathbf{e}_y \sqrt{2} (\cos(\omega t) + \sin(\omega t))$$

- a) Trouver le vecteur phaseur équivalent

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-j \\ 0 \end{pmatrix}$$

- b) Montrer que la polarisation est elliptique

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = 1 - 2j \neq 0$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{E}^* = \mathbf{e}_z 2j \neq 0$$

$\Rightarrow$ polarisation elliptique

- c) Décomposer $\mathbf{E}(t)$ en deux champs :

- à polarisation linéaire et déphasés de 90°

Il faut que

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

avec le premier vecteur purement réel et le 2ème purement imaginaire. On obtient donc

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui correspond à

$$E_1(t) = \sqrt{2}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)\cos(\omega t)$$

$$E_2(t) = \sqrt{2}(\mathbf{e}_y)\sin(\omega t)$$

qui sont bien déphasés de 90° et de polarisation linéaire.

- à polarisation circulaire de sens opposé

Il faut alors que

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

avec le premier vecteur ayant une polarisation circulaire droite et le deuxième une polarisation circulaire gauche. On a donc :

$$\mathbf{E}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{E}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il reste à déterminer α et β pour que la somme de ces deux champs donne le champ initial.

On obtient $\alpha = 1-j/2$ et $\beta = j/2$

Problème 2

Une antenne rayonne une puissance dont la densité est donnée par l'expression

$$p(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} C \frac{\cos^n \theta}{r^2} & ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 & ; \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad [\text{W/m}^2]$$

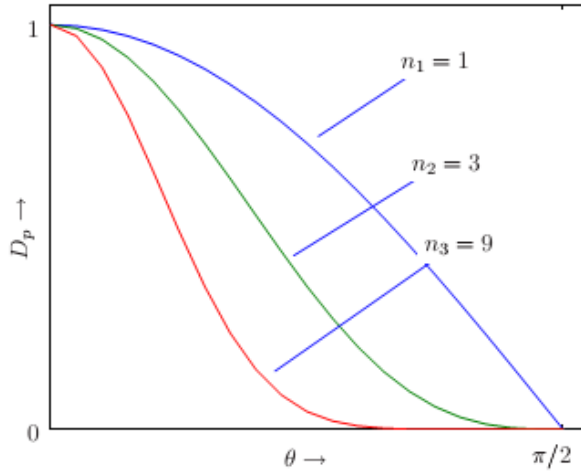
où C est une constante.

- 1) Esquisser l'évolution de la forme du diagramme de rayonnement avec l'exposant n .
- 2) Calculer la puissance rayonnée totale et la valeur moyenne de la densité de puissance (densité de puissance isotropique p_{iso}) sur une sphère de rayon r .
- 3) Trouver la valeur maximale de la directivité de l'antenne en fonction de l'exposant n .

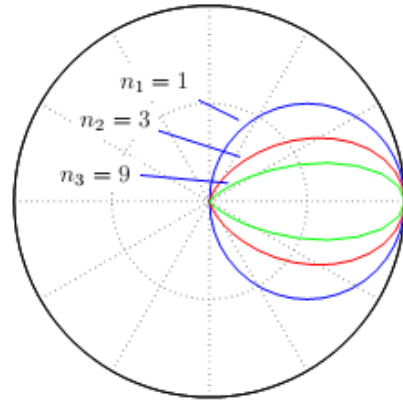
Solution

Le diagramme de rayonnement en puissance est donné par

$$D_p(\theta, \varphi) = \begin{cases} \cos^n \theta & ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 & ; \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$



(a) Coord. cartésiennes.



(b) Coord. polaires.

La puissance totale rayonnée P_{rad} est donnée par l'intégrale surfacique de la densité de puissance sur une sphère de rayon r entourant l'antenne:

$$P_{\text{rad}} = \iint_S p(r, \theta, \varphi) ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} C \frac{\cos^n \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta = C \frac{2\pi}{n+1}$$

La densité de puissance rayonnée isotropique est donnée par

$$p_{\text{iso}} = \frac{P_{\text{rad}}}{4\pi r^2} = \frac{C}{2(n+1)r^2}$$

On obtient alors la directivité:

$$D(\theta) = \frac{p(\theta)}{p_{\text{iso}}} = \begin{cases} 2(n+1)\cos^n \theta, & \theta \in [0, \pi/2] \\ 0, & \theta \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

Il est clair que la directivité est maximale pour $\theta=0$, et est donnée par

$$D_{\text{max}} = D(\theta=0) = 2(n+1)$$